

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα υπόλοιπα a και b των διαιρέσεων

$$\frac{16^{53}}{7} \quad \text{και} \quad \frac{3^{247}}{17}$$

αντίστοιχα και ακολούθως να λυθεί η γραμμική ισοτιμία: $ax \equiv b \pmod{23}$

ΘΕΜΑ 2

Έστω $n > 1$ ένας φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι το n είναι άρτιος αν και μόνον αν

$$\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = 0$$

ΘΕΜΑ 3

Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο στην δεκαδική παράσταση του αριθμού:

$$(2013)^{(2014^{2015})}$$

ΘΕΜΑ 4

Για τη γραμμική Διοφαντική εξίσωση $14x + 21y = 350$

να βρεθούν (αν υπάρχουν): (α) όλες οι λύσεις, και (β) όλες οι θετικές λύσεις.

ΘΕΜΑ 5

Έστω $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ μια αριθμητική συνάρτηση. Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$\sum_{d|n} f(d) = \frac{1}{n}$$

να βρεθεί η τιμή $f(2013)$. Θεωρείται γνωστό ότι η πρωτογενής ανάλυση του 2013 είναι $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$

ΘΕΜΑ 6

Να βρεθούν όλες οι πρωταρχικές ρίζες $\pmod{18}$.

ΘΕΜΑ 7

Να λυθεί το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{12} \\ 2x \equiv 5 \pmod{7} \\ 3x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 8

Βρείτε τις ιδιοτητές τις οποίες πρέπει να έχει η πρωτογενής ανάλυση ενός φυσικού

$n \geq 2$, έτσι ώστε η γραμμική ισοτιμία $27x \equiv 18 \pmod{n}$

να έχει ακέραιες λύσεις. Για τον μικρότερο τέτοιο n με την ιδιότητα $n > 20$ βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ισοτιμίας.